УДК 519.716
DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-2

С. С. Марченков

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ В ГРУППЕ ПЕРЕСТАНОВОК, ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПО КАЛЬМАРУ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Более 30 лет назад на стыке теории рекурсивных функций и теории групп была сформулирована проблема о конечной порождаемости некоторых крупных групп рекурсивных перестановок, связанных с классами иерархии Гжегорчика. Эта проблема была положительно решена С. А. Волковым в 2008 г. Решение С. А. Волкова в техническом плане довольно сложное и использует ряд фактов, доказательство которых потребовало значительных усилий многих математиков. Несмотря на то что этапы полного доказательства по отдельности опубликованы, до сих пор отсутствует автономное изложение, которое не требует обращения к другим утверждениям и источникам. Основной целью работы является воспроизведение всех этапов получения теоремы С. А. Волкова на примере группы перестановок, элементарных по Кальмару. Кроме того, цель заключается также в явном представлении всех перестановок (их число равно 22), которые порождают рассматриваемую группу. Это создает предпосылки для анализа теоретико-числовых, алгебраических и теоретико-рекурсивных свойств перестановок из достаточно широкой и репрезентативной группы перестановок, элементарных по Кальмару.

Материалы и методы. В работе используются теоретико-рекурсивные, алгебраические и комбинаторные методы.

Результаты и выводы. Описаны (в основном без доказательств) три этапа в получении теоремы С. А. Волкова. При этом удалены все «побочные» результаты, которые возникали при использовании результатов различных авторов. Для первого этапа (построение конечных базисов по суперпозиции в классе K функций, элементарных по Кальмару) рассмотрен весь путь от формулирования проблемы А. Гжегорчиком в 1953 г. до получения «окончательного» результата в 2006 г. Второй этап (построение конечных базисов по суперпозиции в классе всех одноместных функций из K) изложен с доказательствами, специально написанными для настоящей работы. Третий этап (построение конечной порождающей системы в группе G_K всех перестановок из класса K) в основном следует исходной работе С. А. Волкова.

Ключевые слова: перестановки, элементарные по Кальмару; конечно порожденная группа перестановок.

S. S. Marchenkov

BUILDING A FINITELY GENERATING SYSTEM IN A GROUP OF KALMAR-ELEMENTARY PERMUTATIONS

Abstract.

Background. Over 30 years ago, at the interface of the theory of recursive functions and the theory of groups there was formulated a problem of finite generation of some

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-01-00593.

large groups of recursive permutations, associated with classes of the Grzegorczyk hierarchy. This problem was successfully solved by S. A. Volkov in 2008. S. A. Volkov's solution was technically quite complicated and used a series of facts, the solution of which required considerable efforts of many mathematicians. Despite the fact that stages of proving were separately published, so far there has been no independent description that doesn't require addressing other statements and sources. The aim of this work is to describe all stages of obtainment of S.A. Volkov's theorem by the example of a group of Kalmar-elementary permutations. Besides, the study is also aimed at explicitely defining all ermutations (total amount – 22) that generate the group under consideration. This creates preconditions for analyzing number-theoretic, algebraic and recursive-theoretic properties of permutations from a sufficiently broad and representative group of Kalmar-elementary permutations.

Materials and methods. In the study the author used recursive-theoretic, algebraic and combinatorial methods.

Results and conclusions. The author described (without proving) three stages of S.A. Volkov's theorem obtainment. All side results, occurring while using the results of different authors, were deleted. For the first stage (superposition construction of finite bases in the *K* function Kalmar-elementary class) the researcher considered the whole path – from A. Grzegorczyk's formaulation of the problem in 1953 till obtainment of the "final" result in 2006. The second stage (superposition construction of finite bases in the class of all one-place functions from *K*) was described with proving, prepared specifically for the present work. The third stage (construction of the finite generating system in the G_K group of all permutation from the *K* class) generally follows the original work of S.A. Volkov.

Key words: Kalmar-elementary permutations, finitely presented permutation group.

Введение

Перестановки и группы перестановок играют важную роль в алгебре, геометрии, комбинаторике, теории функциональных систем и многих других разделах математики. Широта и подробность исследований в этой области сильно зависят от множеств, на которых определены перестановки. В наибольшей степени изучены перестановки на конечных множествах, в существенно меньшей степени – перестановки на бесконечных множествах.

Мы будем рассматривать рекурсивные перестановки на множестве $\mathbf{N} = \{0,1,\ldots\}$ натуральных чисел. Наибольший интерес для приложений (в частности, в теории рекурсивных функций) представляют конечно порожденные группы рекурсивных перестановок. Легко строятся примеры конечных и бесконечных групп подобного типа. Однако положение существенно меняется, если требуется установить конечную порождаемость конкретных групп рекурсивных перестановок, связанных с известными классами рекурсивных функций.

Понятно, что условие конечной порождаемости обеспечивает рекурсивную перечислимость группы. Более детальный анализ показывает, что это условие, вообще говоря, не является достаточным для существования в группе конечной порождающей системы. Представляется естественным добавить требование, чтобы «исходный» класс рекурсивных функций – наименьший класс, который «порождает» рассматриваемую группу перестановок, – имел конечный базис по суперпозиции.

Если обратиться к известным перечислимым классам рекурсивных функций (классы $\mathcal{E}^n$ иерархии Гжегорчика [1] или класс примитивно рекурсивных функций, например), то легко обнаруживается, что множества всех перестановок данных классов не замкнуты относительно операции взятия обратной перестановки и потому группами не являются. Вместе с тем, если ограничиться только такими перестановками, обратные к которым также входят в рассматриваемый класс, то соответствующее множество перестановок уже будет являться группой.

Таким образом, мы приходим к постановке следующей проблемы (для частного случая она сформулирована в работе [2]). Пусть класс K (многоместных) рекурсивных функций имеет конечный базис по суперпозиции и G_K – множество всех перестановок из K, обратные к которым принадлежат классу K, которое рассматривается как группа с операцией композиции (суперпозиции) и единицей – тождественной функцией. Является ли группа G_K конечно порожденной?

Разумеется, в такой постановке сформулированная проблема представляется слишком общей и вряд ли получит окончательное решение. Поэтому, исходя из содержательных соображений, необходимо рассматривать в первую очередь достаточно широкие и интересные классы K, включающие наиболее «употребительные»» рекурсивные функции. Высказанным требованиям почти идеально удовлетворяют классы $\mathcal{E}^n$ $(n \geq 2)$ иерархии Гжегорчика. В связи с этим задача о построении конечных порождающих систем в группах G_K изначально ставилась именно для классов Гжегорчика. В 2008 г. С. А. Волков [3] положительно решил ее не только для классов $\mathcal{E}^n$, но также для целой серии других классов, удовлетворяющих некоторым естественным условиям (с минимальными изменениями доказательство переизложено в книге [4]).

Этот результат можно отнести к результатам «прорывного» характера. В теории рекурсивных функций вообще не было известно результатов о конечной порождаемости крупных и содержательно интересных групп рекурсивных перестановок. Результат С. А. Волкова открыл новые перспективы в этом направлении и вполне может привести к определенным продвижениям собственно в теории групп.

Применительно к классам Гжегорчика полное решение сформулированной выше проблемы разбивается на три этапа. Первый этап состоит в построении конечного базиса по суперпозиции в рассматриваемом классе $\mathcal{E}^n$. Этот этап довольно трудоемкий, может использовать различные способы задания класса $\mathcal{E}^n$ и соответственно различные методы построения конечных базисов.

На втором этапе происходит преобразование конечного базиса по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^n$ в конечный базис по суперпозиции в классе $\mathcal{E}_1^n$ всех одноместных функций из $\mathcal{E}^n$. Этот этап не зависит от класса $\mathcal{E}^n$ и может быть выполнен для любого класса, имеющего конечный базис по суперпозиции и содержащего тройку нумерационных функций.

На третьем этапе происходит собственно построение конечной порождающей системы в группе перестановок, ассоциированной с классом $\mathcal{E}^n$. Здесь используется базис B по суперпозиции в классе $\mathcal{E}_1^n$ и ряд вспомогательных перестановок, позволяющих оперировать с «кодами»-перестановками функций из B.

Перечисленные этапы неравноценны по объему и сложности, их выполнение заняло в целом около 45 лет.

В настоящей работе мы хотим изложить историю выполнения всех трех этапов и сформулировать результаты, полученные на каждом из них для важнейшего класса $\mathcal{E}^3$ – класса функций, элементарных по Кальмару (см. [1, 5, 6]). Этот класс относится к классам так называемых элементарных функций и является среди них наиболее известным. Особенность класса $\mathcal{E}^3$ состоит в том, что он содержит все самые распространенные арифметические функции (например, функции $1, x+y, x \cdot y, x^y$, $x \dot{-} y$, $[x/y]$) и допускает целый ряд различных определений как индуктивного, так и сложностного характера. В частности, класс $\mathcal{E}^3$ совпадает с классом всех всюду определенных функций, каждая из которых вычислима за время, ограниченное сверху подходящей суперпозицией функций $x+1, x^y$. При этом тип вычислительного устройства роли не играет – важно лишь то, что оно является универсальным устройством, позволяющим в принципе вычислять любые частично-рекурсивные функции. В силу этих причин класс $\mathcal{E}^3$ оказывается наиболее удобным классом рекурсивных функций, пригодным для решения «арифметических» задач как собственно в теории алгоритмов, так и в ряде смежных областей.

Обращение к классу $\mathcal{E}^3$ вызвано еще одним немаловажным обстоятельством. Этот класс по существу является единственным крупным и содержательно интересным классом рекурсивных функций, для которого конечную порождающую систему в соответствующей группе перестановок можно явно выписать с использованием только известных арифметических функций. Этот факт позволяет оценить алгоритмические, комбинаторные и чисто арифметические возможности данной группы перестановок, а также обнаружить связи рассматриваемой группы с другими объектами алгебры и теории алгоритмов.

В дальнейшем посредством K будем обозначать класс $\mathcal{E}^3$ функций, элементарных по Кальмару.

1. Конечный базис по суперпозиции в классе K

Вопрос о существовании конечных базисов по суперпозиции в классах $\mathcal{E}^n$ был сформулирован А. Гжегорчиком в 1953 г. в широко известной работе [1]. Положительное решение (довольно громоздкое) было получено для всех $n \geq 3$ Д. Рёддингом [7] в 1964 г. В техническом плане доказательство Д. Рёддинга существенно улучшил Ч. Парсонс [8]. Он, в частности, явно выписал систему из 19 элементарных по Кальмару функций, суперпозиции которых порождают класс K. Независимым образом автор в работах [9–11] предложил «машинный» метод построения конечных базисов по суперпозиции, который по области применения оказался шире метода Рёддинга – Парсонса.

Дальнейшее продвижение в направлении построения «простых» базисов по суперпозиции в классе K связано с результатом Ю. В. Матиясевича [12] о диофантовом представлении рекурсивно перечислимых предикатов. Опираясь на этот результат, автор [13] доказал, что базис по суперпозиции в классе K образует система функций

$$\{x+1, \quad x^y, \quad [x/y], \quad \varphi(x,y)\},$$

где $\varphi(x,y)$ равно наименьшему номеру нулевого разряда в представлении числа y в позиционной системе с основанием x (при $x \le 1$ значение функции можно считать равным нулю). В работе [13] было также показано, что суперпозициями функций системы

$$\{x+1, \quad x^y, \quad x \dot{-} y, \quad [x/y]\}, \tag{1}$$

где $x \dot{-} y = \max(x-y, 0)$, можно заведомо реализовать все функции из K, принимающие конечное число значений. Возникло предположение, что система (1) является базисом по суперпозиции в классе K.

Доказательство этого предположения приблизили работы [14, 15], в которых была установлена полнота в классе K системы функций

$$\{x \dot{-} 1, \; [x/y], \; 2^{x+y}, \; \sigma(x)\},$$

где $\sigma(x)$ равно числу единиц в двоичном представлении x. При этом использовались экспоненциально диофантовы представления рекурсивно перечислимых предикатов, принадлежащие Ю. В. Матиясевичу [16, 17].

В 2002 г. С. Маззанти [18] доказал, что функция $\sigma(x)$ представима суперпозициями функций системы

$$\{x+y, x \dot{-} y, [x/y], 2^x\}. \tag{2}$$

Тем самым было завершено доказательство следующей теоремы, имеющей «окончательный» характер.

Теорема 1. Система функций (2) образует базис по суперпозиции в классе K.

Этот результат позволил также установить полноту в классе K системы функций (1).

Полное доказательство того, что система (2) образует базис по суперпозиции в классе K, получается довольно объемным: помимо результатов работ [15, 18], оно включает также результаты Ю. В. Матиясевича об однократном экспоненциально диофантовом представлении рекурсивно перечислимых предикатов. Поэтому автором была предпринята попытка упростить доказательство и, в частности, исключить результаты о диофантовом и экспоненциально диофантовом представлении рекурсивно перечислимых предикатов. В результате была написана работа [19] (см. также книги [4, 20]), где основная роль в доказательстве отводится исключению операции ограниченного суммирования (из индуктивного определения класса K) с помощью функций системы (2).

2. Конечный базис по суперпозиции в классе K_1

Обозначим через K_1 множество всех одноместных функций из K. В этом разделе будет показано, как базис (2) класса K преобразовать в базис класса K_1 (добавляя при этом некоторые «технические» функции, являющиеся суперпозициями нумерационных функций). Отметим, что для произвольных классов (многоместных) функций, замкнутых относительно суперпозиции и содержащих тройку нумерационных функций, подобный факт установлен в работе [2]. В приводимом далее доказательстве мы учитываем специфику класса K и проводим ряд дополнительных преобразований, приближая изложение к целям настоящей работы.

Прежде всего в целях упрощения вспомогательных функций нам придется отказаться от «общей» операции суперпозиции, заменив ее на четыре алгебраические операции ζ, τ, $\Delta, *$ (введены А. И. Мальцевым [21, 22]).

1. Одноместная операция ζ циклической перестановки аргументов.

Результат применения операции ζ к n-местной функции f есть n-местная функция ζf, которая определяется тождеством

$$(\zeta f)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$

при $n \geq 2$ и совпадает с функцией f при $n = 1$.

2. Одноместная операция τ транспозиции (первых двух) аргументов, которая определяется тождеством

$$(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

при $n \geq 2$ и дает функцию f при $n = 1$.

3. Одноместная операция Δ отождествления (первых двух) аргументов, которая определяется тождеством

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

при $n \geq 2$ и дает функцию f при $n = 1$.

4. Двуместная операция $*$, которая определяется тождеством

$$(f * g)(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Если $P_{\mathbf{N}}$ – множество всех функций на $\mathbf{N}$, то замкнутые относительно операции суперпозиции (без операции введения фиктивных переменных) множества функций из $P_{\mathbf{N}}$ в точности соответствуют подалгебрам предытеративной алгебры $\langle P_{\mathbf{N}}; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$ [21, 22].

В дальнейшем важную роль будет играть канторовская тройка нумерационных функций c, l, r (см., например, [23]), где

$$c(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2)^2 + 3x_1 + x_2}{2}, \quad l(x) = x \dot{-} \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8x+1}+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{8x+1} \dot{-} 1}{2}\right],$$

$$r(x) = \left[\frac{\sqrt{8x+1}+1}{2}\right] \dot{-} (l(x)+1).$$

Функция c устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbf{N}^2$ и $\mathbf{N}$, удовлетворяя тождествам

$$l(c(x_1,x_2)) = x_1, \quad r(c(x_1,x_2)) = x_1, \quad c(l(x),r(x)) = x.$$

Если положить

$$c^2(x_1,x_2) = c(x_1,x_2)$$

и при $n \geq 2$ –

$$c^{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = c(c^n(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1}),$$

то при любом $n \geq 2$ функция c^n будет взаимно однозначно отображать множество $\mathbf{N}^n$ на множество $\mathbf{N}$. «Обратные» к c^n функции определяются суперпозициями функций l,r.

Чтобы упростить запись приводимых далее формул, будем заменять в суперпозициях одноместных функций некоторые скобки знаком $\circ$.

Для произвольной n-местной функции f следующим образом определим ее «код» $\hat{f}(x)$:

$$\hat{f}(x) = c(f(r \circ l^{(n)}(x),\ldots,r \circ l(x)),x),$$

где $l^{(n)}$ обозначает n-кратную суперпозицию функции l. Кодами функций (2) являются функции

$$c\left(r \circ l^{(2)}(x) + r \circ l(x), x\right), \quad c\left(r \circ l^{(2)}(x) \dot{-} r \circ l(x), x\right),$$

$$c\left([r \circ l^{(2)}(x) / r \circ l(x)], x\right), \quad c\left(2^{r \circ l(x)}, x\right). \qquad (3)$$

Для оперирования с функциями (3) нам понадобятся еще следующие функции:

$$l(x), \quad c(x,x), \quad c\left(x,r(x)\right), \quad c\left(l^{(2)}(x),r(x)\right), \quad c\left(r \circ l(x),r(x)\right),$$

$$c^3\left(l^{(2)}(x), l \circ r \circ l(x), r(x)\right), \quad c^3\left(l^{(2)}(x), r \circ r \circ l(x), r(x)\right). \qquad (4)$$

Лемма 1. Если функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ образованы суперпозициями функций l,r, то суперпозициями функций системы (4) можно получить функцию

$$c^{n+1}\left(f_1(x),\ldots,f_n(x),x\right). \qquad (5)$$

Доказательство проведем индукцией по n.

Пусть $n=1$. Чтобы получить функцию $c(f_1(x),x)$, возьмем функцию $c(x,x)$ и применим последовательно к ней функции

$$c\left(l^{(2)}(z),r(z)\right),\quad c\left(r\circ l(z),r(z)\right)$$

в том порядке, в котором функция f_1 образована из функций l,r.

Предположим, что мы уже получили функцию (5) и функция f_{n+1} образована суперпозициями функций l,r. Применяя к функции (5) функцию $c(z,r(z))$, получаем функцию

$$g(x)=c^{n+2}\left(f_1(x),\dots,f_n(x),x,x\right).$$

Далее к функции $g(x)$ применяем функции

$$c^3\left(l^{(2)}(z),l\circ r\circ l(z),r(z)\right),\quad c^3\left(l^{(2)}(z),r\circ r\circ l(z),r(z)\right)$$

в той последовательности, в которой функция f_{n+1} получается из функций l,r. Лемма доказана.

Обозначим через Q объединение систем (3), (4), а через $[Q]$ – замыкание системы Q относительно операции суперпозиции.

Лемма 2. Пусть $f_1(x),\dots,f_n(x)$ такие же, как и в лемме 1, функция $h(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит классу K и в замыкание $[Q]$ входит функция $\hat{h}(x)$. Тогда в $[Q]$ входит функция

$$c\left(h(f_1(x),\dots,f_n(x)),x\right). \tag{6}$$

Доказательство. В самом деле, если применить к функции $\hat{h}(x)$ сначала функцию $c(z,r(z))$, а затем функцию $c^3(l^{(2)}(z),r\circ r\circ l(z),r(z))$, то получим функцию $h_1(x)=c^3(h(r\circ l^{(n)}(x),\dots,r\circ l(x)),r(x),x)$.

Как установлено в лемме 1, функцию

$$d(x)=c^{n+2}\left(l(x),f_1(x),\dots,f_n(x),x\right)$$

можно получить суперпозициями функций системы (4). Если теперь определить

$$h_2(x)=h_1(d(x)),$$

то будем иметь

$$h_2(x)=c^3\left(h(f_1(x),\dots,f_n(x)),x,d(x)\right).$$

Остается заметить, что $l(h_2(x))$ есть искомая функция (6). Лемма доказана.

Теорема 2. Функции системы Q образуют базис по суперпозиции в классе K_1.

Доказательство. Проведем индукцию по применению операций (1)–(4) к функциям системы (2) (т.е. индукцией по построению функций класса K из функций системы (2) с помощью операции суперпозиции).

Сначала покажем, что для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ из K суперпозициями функций системы Q можно получить ее «код» $\hat{f}(x)$.

Базис индукции справедлив, поскольку функции системы (3) и являются кодами функций системы (2).

Если функция g получается из функции f с помощью одной из операций (1)–(3) и функция $\hat{f}(x)$ принадлежит замыканию системы функций Q, то в силу леммы 2 этому замыканию будет принадлежать и функция $\hat{g}(x)$.

Пусть теперь

$$h(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n-1}) = f(g(x_1,\ldots,x_m),x_{m+1},\ldots,x_{m+n-1})$$

и функции $\hat{f}(x),\hat{g}(x)$ входят в множество $[Q]$. В силу леммы 2 в множество $[Q]$ будет входить функция

$$g_1(x) = c\left(g\left(r\circ l^{(n+m-1)}(x),\ldots,r\circ l^{(n)}(x)\right),x\right).$$

Применяя к функции $\hat{f}(x)$ последовательно функции

$$c(z,r(z)),\quad c^3\left(l^{(2)}(z),r\circ r\circ l(z),r(z)\right),$$

получим функцию

$$f_1(x) = c^3(f(r\circ l^{(n)}(x),\ldots,r\circ l(x)),r(x),x).$$

Как и выше, из функции $g_1(x)$ с помощью функций

$$c(z,r(z)),\quad c^3\left(l^{(2)}(z),l\circ r\circ l(z),r(z)\right),\quad c^3\left(l^{(2)}(z),r\circ r\circ l(z),r(z)\right)$$

образуем функцию

$$g_2(x) = c^{n+1}\left(g\left(r\circ l^{(n+m-1)}(x),\ldots,r\circ l^{(n)}(x)\right),r\circ l^{(n-1)}(x),\ldots,r\circ l(x),x\right).$$

Если теперь положить

$$h'(x) = f_1(g_2(x)),$$

то, пользуясь представлениями функций $f_1(x),g_2(x)$, будем иметь

$$h'(x) = c^3\left(f\left(g\left(r\circ l^{(n+m-1)}(x),\ldots,r\circ l^{(n)}(x)\right),r\circ l^{(n-1)}(x),\ldots,r\circ l(x)\right),x,g_2(x)\right).$$

Следовательно, функция $\hat{h}(x)$ будет совпадать с функцией $l(h'(x))$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, возьмем произвольную функцию $f(x)$ из класса K. Как установлено выше, суперпозициями функций системы Q можно получить функцию

$$f_1(x) = c(f \circ r \circ l(x), x).$$

Тогда, очевидно,

$$l(f_1(x)) = f \circ r \circ l(x).$$

Теперь функцию $f(x)$ получаем применением функции $f \circ r \circ l(z)$ к функции $c^3(x, x, x)$, которая, в свою очередь, является суперпозицией функций $c(x, x)$ и $c(x, r(x))$. Теорема доказана.

3. Конечная порождающая система в группе G_K

Для любой функции $f(x)$ обозначим через p_f «код» функции f – перестановку на $\mathbf{N}$, которая при любых x_1, x_2, x_3 удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathrm{p}_f\left(c^3(x_1, 2x_2, x_3)\right) = c^3\left(f(x_1), 2c(x_1, x_2), x_3\right),$$

$$\mathrm{p}_f\left(c^3(x_1, 4x_2 + 1, x_3)\right) = c^3\left(x_1, 2x_2 + 1, x_3\right),$$

$$\mathrm{p}_f\left(c^3(x_1, 4x_2 + 3, x_3)\right) = c^3\left(x_1, 2x_2, x_3\right) \text{ при } x_1 < f(l(x_2)),$$

$$\mathrm{p}_f\left(c^3(x_1, 4x_2 + 3, x_3)\right) = c^3\left(x_1 + 1, 2x_2, x_3\right) \text{ при } x_1 \ge f(l(x_2)).$$

Можно проверить, что данные соотношения корректно определяют перестановку p_f.

Обозначим через $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_{11}$ перестановки, которые определяются для функций системы Q согласно приведенным выше соотношениям.

Так же как в случае построения базиса в классе K_1, для «моделирования» суперпозиций функций системы Q и «декодирования» полученных результатов необходимы дополнительные перестановки. При их определении мы используем оригинальные обозначения из [3].

Далее будет применяться сокращенная запись перестановок. Так, запись $f : g(y) \to h(y)$ означает, что $f(g(y)) = h(y)$ при любом y (иногда на переменную y будут налагаться дополнительные ограничения), запись $f : g(y) \leftrightarrow h(y)$ означает, что $f(g(y)) = h(y)$ и $f(h(y)) = g(y)$. Для тех x, для которых значение $f(x)$ не определяется указанными соотношениями, полагаем $f(x) = x$:

$$\text{px: } c^3(x_1, x_2, 0) \leftrightarrow c^3(x_1, x_2, x_1 + 2);$$

$$\text{del: } c^3(x_1, 2x_2, 0) \leftrightarrow c^3(x_1, 2x_2, 1);$$

$$s_{ij} : 4x + i \leftrightarrow 4x + j \quad (0 \le i < j \le 3);$$

$$\text{move}:\begin{cases} c^3(x_1,2x_2,0)\to c^3(x_1,2x_2+2,0),\\ c^3(x,1,0)\to c^3(x,0,0),\\ c^3(x_1,2x_2+3,0)\to c^3(x_1,2x_2+1,0); \end{cases}$$

$$\text{place}:\begin{cases} c^3(x,0,0)\to 2x,\\ c^3(x_1,x_2+1,0)\to 4c(x_1,x_2)+1,\\ c^3(x_1,x_2,x_3+1)\to 4c^3(x_1,x_2,x_3)+3; \end{cases}$$

$$\text{swap}_1:\begin{cases} c^3(x_1,2x_2,x_3)\to c^3(x_1+2,2x_2,x_3),\ x_3\ge 2,\\ c^3(x_1,2x_2,0)\to c^3(x_1,2x_2,0),\\ c^3(x_1+2,2x_2+1,x_3)\to c^3(x_1,2x_2+1,x_3),\ x_3\ge 2,\\ c^3(x_1,2x_2+1,x_3)\to c^3(x_1,2x_2,x_3),\ x_1\in\{0,1\},\ x_3\ge 3; \end{cases}$$

$$\text{swap}_2:\begin{cases} c^3(x_1,2x_2,x_3)\to c^3(x_3,2x_2,x_1+2),\ x_3\ge 2,\\ c^3(x_1,2x_2,0)\to c^3(x_1,2x_2,0),\\ c^3(x_1+2,2x_2+1,x_3)\to c^3(x_1,2x_2+1,x_3),\ x_3\ge 2,\\ c^3(x_1,2x_2+1,x_3)\to c^3(x_1,2x_2,x_3),\ x_1\in\{0,1\},\ x_3\ge 2. \end{cases}$$

Центральный результат работы сформулирован в теореме 3, принадлежащей С. А. Волкову [3].

Теорема 3. Группа G_K порождается следующей системой из двадцати двух перестановок:

$$\mathrm{p}_1,\ldots,\mathrm{p}_{11},\ \mathrm{px},\ \mathrm{del},\ \mathrm{s}_{ij}\ (0\le i<j\le 3),\ \mathrm{move},\mathrm{swap}_1,\ \mathrm{swap}_2.$$

Список литературы

1. **Grzegorczyk, A.** Some classes of recursive functions / A. Grzegorczyk // Rozprawy Matematiczne. – 1953. – Vol. 4. – P. 1–44.
2. **Марченков, С. С.** Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций / С. С. Марченков // Математические вопросы кибернетики. – 1991. – Вып. 3. – С. 115–139.
3. **Волков, С. А.** Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок / С. А. Волков // Дискретная математика. – 2008. – Т. 20, № 4. – С. 61–78.
4. **Марченков, С. С.** Представление функций суперпозициями / С. С. Марченков. – М. : Комкнига, 2010. – 189 с.
5. **Kalmar, L.** Ein einfach Beispiel für unentscheibares Problem / L. Kalmar // Matematikai és fizikai lapok. – 1943. – Vol. 50. – P. 1–23.
6. **Марченков, С. С.** Элементарные рекурсивные функции / С. С. Марченков. – М. : МЦНМО, 2003. – 112 с.
7. **Rödding, D.** Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen / D. Rödding // Zeitsch. math. Logik u. Grundlagen Math. – 1964. – Vol. 10, №. 4. – P. 315–330.

8. **Parsons, Ch.** Hierarchies of primitive recursive functions / Ch. Parsons // Zeitschr. math. Logik u. Grundlagen Math. – 1968. – Vol. 14, №. 4. – P. 357–376.
9. **Козмидиади, В. А.** О многоголовочных автоматах / В. А. Козмидиади, С. С. Марченков // Проблемы кибернетики. – 1969. – Вып. 21. – С. 127–158.
10. **Марченков, С. С.** Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика / С. С. Марченков // Математические заметки. – 1969. – Т. 5, № 5. – С. 561–568.
11. **Марченков, С. С.** Об ограниченных рекурсиях / С. С. Марченков // Mathematica Balkanica. – 1972. – Т. 2. – С. 124–142.
12. **Матиясевич, Ю. В.** Диофантово представление перечислимых предикатов / Ю. В. Матиясевич // Известия АН СССР. Сер. Матем. – 1971. – Т. 35, № 1. – С. 3–30.
13. **Марченков, С. С.** Об одном базисе по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару / С. С. Марченков // Математические заметки. – 1980. – Т. 27, № 3. – С. 321–332.
14. **Марченков, С. С.** Простые примеры базисов по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару / С. С. Марченков // Всесоюзная конференция по прикладной логике. – Новосибирск, 1985. – С. 139–141.
15. **Марченков, С. С.** Простые примеры базисов по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару / С. С. Марченков // Combinatorics and Graph Theory. Banach Center Publications. – 1989. – Vol. 25. – P. 119–126.
16. **Матиясевич, Ю. В.** Существование неэффективизируемых оценок в теории экспоненциально диофантовых уравнений / Ю. В. Матиясевич // Записки научных семинаров Ленинградского отделения матем. ин-та АН СССР. – 1974. – Т. 40. – С. 77–93.
17. **Матиясевич, Ю. В.** Новое доказательство теоремы об экспоненциально диофантовом представлении перечислимых предикатов / Ю. В. Матиясевич // Записки научных семинаров Ленинградского отделения матем. ин-та АН СССР. – 1976. – Т. 60. – С. 75–92.
18. **Mazzanti, S.** Plain bases for classes of primitive recursive functions / S. Mazzanti // Math. Logic Quarterly. – 2002. – Vol. 48. – P. 93–104.
19. **Марченков, С. С.** Суперпозиции элементарных арифметических функций / С. С. Марченков // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. – 2006. – Т. 13, № 4. – С. 33–48.
20. **Марченков, С. С.** Элементарные арифметические функции / С. С. Марченков. – М. : Либроком, 2009. 47 с.
21. **Мальцев, А. И.** Итеративные алгебры и многообразия Поста / А. И. Мальцев // Алгебра и логика. – 1966. – Т. 5, № 2. – С. 5–24.
22. **Мальцев, А. И.** Итеративные алгебры Поста / А. И. Мальцев. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1976. – 100 с.
23. **Мальцев, А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986. – 366 с.

References

1. Grzegorczyk A. *Rozprawy Matematiczne* [Mathematical apparatus]. 1953, vol. 4, pp. 1–44.
2. Marchenkov S. S. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. 1991, iss. 3, pp. 115–139.
3. Volkov S. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2008, vol. 20, no. 4, pp. 61–78.
4. Marchenkov S. S. *Predstavlenie funktsiy superpozitsiyami* [Superposition representation of functions]. Moscow: Komkniga, 2010, 189 p.

5. Kalmar L. *Matematikai és fizikai lapok* [Mathematical and physical journal]. 1943, vol. 50, pp. 1–23.
6. Marchenkov S. S. *Elementarnye rekursivnye funktsii* [Elementary recursive functions]. Moscow: MTsNMO, 2003, 112 p.
7. Rödding D. *Zeitsch. math. Logik u. Grundlagen Math*. [Journal of mathematical logic and mathematical principles]. 1964, vol. 10, no. 4, pp. 315–330.
8. Parsons Ch. *Zeitschr. math. Logik u. Grundlagen Math.* [Journal of mathematical logic and mathematical principles]. 1968, vol. 14, no. 4, pp. 357–376.
9. Kozmidiadi V. A., Marchenkov S. S. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. 1969, iss. 21, pp. 127–158.
10. Marchenkov S. S. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1969, vol. 5, no. 5, pp. 561–568.
11. Marchenkov S. S. *Mathematica Balkanica* [Balcan mathematics]. 1972, vol. 2, pp. 124–142.
12. Matiyasevich Yu. V. *Izvestiya AN SSSR. Ser. Matem.* [Proceedings of AS USSR. Mathematical series]. 1971, vol. 35, no. 1, pp. 3–30.
13. Marchenkov S. S. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1980, vol. 27, no. 3, pp. 321–332.
14. Marchenkov S. S. *Vsesoyuznaya konferentsiya po prikladnoy logike* [All-USSR conference on applied logic]. Novosibirsk, 1985, pp. 139–141.
15. Marchenkov S. S. *Combinatorics and Graph Theory. Banach Center Publications*. 1989, vol. 25, pp. 119–126.
16. Matiyasevich Yu. V. *Zapiski nauchnykh seminarov Leningradskogo otdeleniya matem. in-ta AN SSSR* [Proceedings of scientific seminars of the Leningrad branch of the Institute of Mathematics of AS USSR]. 1974, vol. 40, pp. 77–93.
17. Matiyasevich Yu. V. *Zapiski nauchnykh seminarov Leningradskogo otdeleniya matem. in-ta AN SSSR* [Proceedings of scientific seminars of the Leningrad branch of the Institute of Mathematics of AS USSR]. 1976, vol. 60, pp. 75–92.
18. Mazzanti S. *Math. Logic Quarterly*. 2002, vol. 48, pp. 93–104.
19. Marchenkov S. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 1.* [Discrete analysis and research of operations. Series 1]. 2006, vol. 13, no. 4, pp. 33–48.
20. Marchenkov S. S. *Elementarnye arifmeticheskie funktsii* [Elementary arithmetic functions]. Moscow: Librokom, 2009, 47 p.
21. Mal'tsev A. I. *Algebra i logika* [Algebra and logic]. 1966, vol. 5, no. 2, pp. 5–24.
22. Mal'tsev A. I. *Iterativnye algebry Posta* [Post iterative algebras]. Novosibirsk: Izd-vo Novosib. gos. un-ta, 1976, 100 p.
23. Mal'tsev A. I. *Algoritmy i rekursivnye funktsii* [Algorithms and recursive functions]. Moscow: Nauka, 1986, 366 p.

Марченков Сергей Серафимович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математической кибернетики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: ssmarchen@yandex.ru

Marchenkov Sergey Serafimovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of mathematical cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory street, Moscow, Russia)

УДК 519.716

Марченков, С. С.

Построение конечной порождающей системы в группе перестановок, элементарных по Кальмару / С. С. Марченков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 13–26. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-2